КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Номера задач выбираются в соответствии с таблицей:

Вар.	Номера контрольных заданий								
0	200	210	220	230	240	250	260	270	280
1	201	211	221	231	241	251	261	271	281
2	202	212	222	232	242	252	262	272	282
3	203	213	223	233	243	253	263	273	283
4	204	214	224	234	244	254	264	274	284
5	205	215	225	235	245	255	265	275	285
6	206	216	226	236	246	256	266	276	286
7	207	217	227	237	247	257	267	277	287
8	208	218	228	238	248	258	268	278	288
9	209	219	229	239	249	259	269	279	289

Контрольные задания

200–209. Найти пределы последовательностей.

200. $a)\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{(n+4)^3}$; $\quad b)\ \lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-n-1)$;
$c)\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+\ldots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$.

201. $a)\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+2n^2+3n}{4n^3+5}$;
$b)\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n+1}}{\sqrt[3]{n^3+1}+n+1}$;
$c)\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{27}+\ldots+\dfrac{(-1)^n}{3^n}\right)$.

202. $a)\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2}{n+1}-\dfrac{n^3}{n^2+1}\right)$; $\quad b)\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sin n}{n\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$;
$c)\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}\right)$.

203. $a)\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)^3-n(n+4)^2}{(n+5)^2}$; $\quad b)\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n}$;
$c)\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+4+\ldots+2^n}{1+3+9+\ldots+3^n}$.

204. $a)\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{2n+3}\right)^4$; $\quad b)\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\,\mathrm{arctg}\,n}{n^2+2}$;
$c)\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)}{1+2+3+\ldots+n}$.

205. $a)\ \lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2+2}\right)$; $\quad b)\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n^2+1}\cos\dfrac{n^2+1}{n+1}$;
$c)\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}$.

206. $a)\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n\left(\sqrt{n^2-1}-n\right)}$; $\quad b)\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^n}{2n+(-1)^n}$;
$c)\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\ldots+2n}{\sqrt{n^4+1}}$.

207. $a)\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n^3+1}-n\sqrt{n}};$ $\qquad b)\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sin n}{n^2+1};$

$c)\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}+\ldots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{2^{n+1}}\right).$

208. $a)\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+3^{-n}}{2^{-n}+3^n};$ $\qquad b)\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}\right);$

$c)\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n+1}-\dfrac{2n+1}{2}\right).$

209. $a)\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{(n+3)(n+5)}-n);$ $\qquad b)\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^4+1}{n^3-1}-\dfrac{3n^2}{3n+1}\right);$

$c)\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n}-\ldots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\right).$

210–219. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя

210. a) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-2x^2}{\sqrt{x+2}-x};$
b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin 7\pi x}{\ln(2-x)};$
c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^x.$

211. a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{4x^3+5x};$
b) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\mathrm{tg}(x-2)}{e^x-e^2};$
c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+5x)}{x}.$

212. a) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-x-2}{\sqrt{8-x}-3};$
b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x}{1-e^{-x^2}};$
c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}.$

213. a) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{2-x}+x}{x^3-3x+2};$
b) $\lim\limits_{x\to10}\dfrac{\lg x-1}{\sin\pi x};$
c) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+2x}{1+x}\right)^{1/x}.$

214. a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x^3+x}{\sqrt[3]{1+x}-1};$
b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(x^2-2x+1)}{\sin\pi x};$
c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2}.$

215. a) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-x}{x^2-3x+2};$
b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\lg 10x-1}{\mathrm{tg}(10\pi x)};$
c) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)^{1/x}.$

216. a) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-6x+9}{\sqrt{x+1}-2};$
b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1+\cos(3\pi x)}{1-\log_2(2x)};$
c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+4}{2x+3}\right)^x.$

217. a) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt[3]{6-x}-2}{x^2+5x+6};$
b) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1-\cos\pi x}{\ln(x+1)-\ln 3};$
c) $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin 2x)^{1/x}.$

218. a) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-x-2}{\sqrt{3-x}-2};$
b) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos\frac{x}{2}}{e^x-e^{\pi}};$
c) $\lim\limits_{x\to\infty}x\lg(1+\dfrac{1}{10x}).$

219. a) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-2x^2+x-2}{\sqrt{x+2}-x};$
b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\mathrm{ctg}\,\frac{\pi x}{2}}{2^{x-1}-1};$
c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-5}{2x+5}\right)^{3x}.$

220–229. а) найти множество точек, в которых непрерывна функция $f(x)$;
б) найти точки разрыва функции и определить их характер;

в) можно ли доопределить функцию в точках разрыва так, чтобы она стала непрерывной в этих точках?

220. $f(x) = 2^{\frac{1}{x^2(x-1)}}$.

221. $f(x) = \sqrt[3]{x}\,\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x(x-1)^2}$.

222. $f(x) = \dfrac{1}{1-e^{x/(x-1)}}$.

223. $f(x) = \dfrac{1}{x}\arcsin\dfrac{x}{x-1}$.

224. $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2(x+1)}$.

225. $f(x) = e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{|x|}\right)}$.

226. $f(x) = \dfrac{|x|}{\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x-1}}$.

227. $f(x) = e^{-\frac{1}{|x|(x+1)}}$.

228. $f(x) = x\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x-1}\right)$.

229. $f(x) = \dfrac{1}{x}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+1}$.

230–239. Для заданных функций $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ найти первую и вторую производные. Вычислить значения этих производных в заданных точках x_0. Для функции $f(x)$ найти уравнение касательной и нормали в точке x_0.

230. $f(x) = \ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right), \quad x_0 = 0;$
$g(x) = e^{-1/x}, \quad x_0 = 1;$
$h(x) = \arccos\dfrac{1-x}{\sqrt{2}}, \quad x_0 = 0.$

231. $f(x) = \operatorname{arctg}(x+\sqrt{1+x^2}), \quad x_0 = 0;$
$g(x) = \dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}, \quad x_0 = e^{-1};$
$h(x) = 2^{\sin 2x}, \quad x_0 = 0.$

232. $f(x) = x\sqrt{4-x^2}+4\arcsin\dfrac{x}{2}, \quad x_0 = 0;$
$g(x) = \dfrac{\cos 2x}{2\sin^2 x}, \quad x_0 = \dfrac{\pi}{2};$
$h(x) = e^{-2x^2}, \quad x_0 = 0.$

233. $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}, \quad x_0 = 0;$
$g(x) = \operatorname{tg}^2 x+\ln\cos^2 x, \quad x_0 = \dfrac{\pi}{4};$
$h(x) = x^{-2}-2^{-x}, \quad x_0 = 1.$

234. $f(x) = \ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}, \quad x_0 = \dfrac{\pi}{2};$
$g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}, \quad x_0 = 0;$
$h(x) = e^{e^x}, \quad x_0 = 0.$

235. $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{1+\operatorname{ctg} x}+\dfrac{\cos^2 x}{1+\operatorname{tg} x}, \quad x_0 = \pi;$
$g(x) = \operatorname{arctg} e^{-x}, \quad x_0 = 0;$
$h(x) = \ln\sqrt{\dfrac{e^x}{e^x+1}}, \quad x_0 = 0.$

236. $f(x) = \dfrac{x}{2}(\cos\ln x+\sin\ln x), \quad x_0 = 1;$
$g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x^2-1}{x\sqrt{2}}, \quad x_0 = 1;$
$h(x) = e^{x^2+2x}, \quad x_0 = 0.$

237. $f(x) = \dfrac{1+\cos 8x}{\operatorname{tg} 2x-\operatorname{ctg} 2x}, \quad x_0 = \dfrac{\pi}{8};$
$g(x) = \log_2(x^2+1), \quad x_0 = 0;$
$h(x) = e^{-\sqrt{x}}, \quad x_0 = 0.$

238. $f(x) = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}, \quad x_0 = 0;$
$g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{x}, \quad x_0 = \sqrt{2};$
$h(x) = \ln\dfrac{1-e^{2x}}{e^{2x}}, \quad x_0 = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{2}.$

239. $f(x) = \ln(1+\cos x), \quad x_0 = \dfrac{\pi}{2};$
$g(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}, \quad x_0 = 0;$
$h(x) = 2^{3^x}, \quad x_0 = 0.$

240–249. Найти первую $\dfrac{dy}{dx}$ и вторую $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ производные функций, заданных параметрически.

240. $\begin{cases} x=(t-1)^2(t-2), \\ y=(t-1)^2(t-3). \end{cases}$ 241. $\begin{cases} x=\ln\sin\frac{t}{2}, \\ y=\ln\sin t. \end{cases}$

242. $\begin{cases} x=-2+3t-t^3, \\ y=t+2t^2+t^3. \end{cases}$ 243. $\begin{cases} x=2^{\cos^2 t}, \\ y=2^{\sin^2 t}. \end{cases}$

244. $\begin{cases} x=\cos t+\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}, \\ y=\sin t. \end{cases}$ 245. $\begin{cases} x=\ln(1+\sin t), \\ y=\ln(1-\cos 2t). \end{cases}$

246. $\begin{cases} x=(t^3-2t^2+4t-4)e^t, \\ y=(t^3-2t^2+3t-4)e^t. \end{cases}$ 247. $\begin{cases} x=\ln\operatorname{tg} t, \\ y=\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}. \end{cases}$

248. $\begin{cases} x=t\cos t, \\ y=t\sin t. \end{cases}$ 249. $\begin{cases} x=t^2+6t+5, \\ y=\dfrac{t^3-54}{t}. \end{cases}$

250–259. Используя формулы Тейлора для основных элементарных функций, найти первые пять отличных от нуля членов разложения функции $f(x)$ по степеням $(x-x_0)$.

250. $f(x)=\dfrac{x^2}{2x+3}$, $x_0=0$. 251. $f(x)=(x+1)e^{-x/2}$, $x_0=-1$.
252. $f(x)=\ln(2x+1)$, $x_0=1/2$. 253. $f(x)=x\cos^2 2x$, $x_0=0$.
254. $f(x)=3^{2+x}$, $x_0=1$. 255. $f(x)=\sin\pi x$, $x_0=1$.
256. $f(x)=\sqrt{x+3}$, $x_0=1$. 257. $f(x)=xe^{-x^2/2}$, $x_0=0$.
258. $f(x)=\sin x\cdot\cos x$, $x_0=0$. 259. $f(x)=\operatorname{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, $x_0=0$.

260-269. Найти наибольшее и наименьшее значения функций на заданных отрезках.

260. $y=1+\sqrt[3]{(x^2-2x)^2}$, $x\in[-1;2]$. 261. $y=2x-3\sqrt[3]{x^2}$, $x\in[-1;1]$.

262. $y=1-\sqrt[3]{(x^2-x-2)^2}$, $x\in[-2;2]$. 263. $y=-\sqrt[3]{x^2(x-2)}$, $x\in[-2;4]$.

264. $y=2x+3\sqrt[3]{(x+2)^2}$, $x\in[-3;6]$. 265. $y=\sqrt[3]{(x^3-6x^2+9x)}$, $x\in[0;4]$.

266. $y=x\sqrt[3]{(3x+1)^2}$, $x\in[-1;1]$. 267. $y=1-3\sqrt[3]{2x^2(x-3)}$, $x\in[-1;3]$.

268. $y=1+\sqrt[3]{(1-x^2)^2}$, $x\in[-1;2]$. 269. $y=\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-4}\right)^2}$, $x\in[-2;0]$.

270. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(2,3)$ и отсекающей от первого координатного угла треугольник наименьшей площади.

271. Из круглого бревна радиуса R вытесывается балка с прямоугольным сечением. Считая, что прочность балки пропорциональна ah^2, где a — основание, h — высота прямоугольника, найти отношение $\dfrac{a}{h}$, при котором балка будет иметь наибольшую прочность.

272. Найти высоту и диаметр основания цилиндра наибольшего объема, вписанного в шар радиуса R.

273. Вычислить наибольшую площадь трапеции, вписанной в полукруг радиуса r так, что нижнее основание трапеции совпадает с диаметром полукруга.

274. Для уменьшения трения воды о стенки канала, площадь, смачиваемая жидкостью должна быть наименьшей. Найти лучшую форму открытого прямоугольного канала с заданной площадью S поперечного сечения.

275. На гиперболе $x^2-2y^2=2$ найти точку, ближайшую к точке $A(3,0)$.

276. Открытый бак с квадратным основанием должен вмещать V литров. При каких размерах на изготовление бака потребуется наименьшее количество материала?

277. Зритель находится напротив картины, расположенной вертикально. Нижний край картины расположен выше уровня глаз зрителя на a, верхний край на b. На каком расстоянии от картины должен стоять зритель, чтобы угол под которым он видит картину, оказался наибольшим?

278. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Определить радиус полукруга, при котором окно будет пропускать максимальное количество света, если задан периметр окна.

279. Из трех досок одинаковой ширины нужно сколотить желоб. При каком угле наклона боковых стенок площадь поперечного сечения желоба будет наибольшей?

280–289. Построить графики функций, проведя полное исследование (найти область определения, точки разрыва, интервалы монотонности, точки экстремума, направление выпуклости, точки перегиба, асимптоты).

280. a) $y=(x-1)^2(x+2)$; b) $y=x-\ln(x+1)$.

281. a) $y=\dfrac{x^3}{x-1}$; b) $y=x-2\operatorname{arctg}x$.

282. a) $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$; b) $y=\dfrac{x^2}{2}\ln x-\dfrac{x^2}{4}$.

283. a) $y=\dfrac{(x-1)^3}{(x-2)^2}$; b) $y=\ln x-x+1$.

284. a) $y=x(x-1)^3$; b) $y=x\operatorname{arctg}x$.

285. a) $y=x+\dfrac{7}{x}-\dfrac{3}{x^2}$; b) $y=x^2-2\ln x$.

286. a) $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$; b) $y=x\ln^2 x$.

287. a) $y=\dfrac{x^3}{x-1}$; b) $y=\dfrac{1}{\operatorname{arctg}x}$.

288. a) $y=\dfrac{x^2}{2(x+1)^2}$; b) $y=\dfrac{x}{\ln x}$.

289. a) $y=x-1+\dfrac{1}{x-1}$; b) $y=x+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.